地震の震源決定：原理

求めたい未知数は、震源の場所$\mathbf{x}=(x,y,z)$と地震の起こった時刻（震源時）tで、ベクトルで書くと、

$$\mathbf{m}=(x,y,z,t) \tag{1.1}$$

観測値からなるデータベクトル$\mathbf{d}$は、nこの観測点（場所は$\mathbf{x}_i=(x_i,y_i,z_i)$で表される）で読み取られた地震波の到達時刻$d_i$で構成され、

$$d_i = T(\mathbf{x},\mathbf{x}_i)+t = A(\mathbf{m}) \tag{1.2}$$

にあたる。ここで、$T(\mathbf{x},\mathbf{x}_i)$は、地震波が震源$\mathbf{x}$から観測点$\mathbf{x}_i$まで到達するにかかる時間で、走時と呼ばれる。この関数$T(\cdot)$は、媒質が地震波を伝える速度で決まる。前もって情報として持っているものとする。

地震波の到達時刻のデータから震源を決めるということは、

$$\mathbf{d}=\mathbf{A}(\mathbf{m}) \tag{1.3}$$

の関係のもとで、$\mathbf{d}$が与えられて、$\mathbf{m}$を推定するということになる。

関数$T(\cdot)$が非線形な関数であるため、$\mathbf{m}$の解を得るにはちょっと工夫が必要である。ここでは、テーラー（Taylor）展開を用いて、逐次的に解を探す方法を使ってみる。

未知数である$\mathbf{m}=(m_1,\cdots,m_j,\cdots)$に初期値（おおまかな推定値）を与え、その値をより観測にあうように修正していくことを考える。更新された未知数の推定値（$\mathbf{m}$）は、初期値（$\mathbf{m}^0$）に修正量（$\Delta\mathbf{m}$）を加えた値となる。つまり、

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^0+\Delta\mathbf{m} \tag{1.4}$$

この考えにたつと、$\mathbf{m}$の推定値そのものを求めるのではなく、観測値にあうように修正量$\Delta\mathbf{m} = (\Delta m_1,\cdots,\Delta m_j,\cdots)$を求めることに、問題が置き換えられる。

観測される到達時刻のデータ$\mathbf{d}=(d_1,\cdots,d_i,\cdots)$は、$\Delta m_j$が小さいとすると、初期値$m_j^0$のまわりでテーラー展開できる。高次の項はより小さいので、

$$d_i \approx d_i^0+\sum_j \frac{\partial d_i}{\partial m_j}\Big|_{\mathbf{m}^0}\Delta m_j \tag{1.5}$$

と近似できる。ここで、d_i^0は初期値m_j^0から予測される到達時間。

観測値と予測される到達時間の違いは、

$$\Delta d_i^0 \equiv d_i - d_i^0 \approx \sum_j \frac{\partial d_i}{\partial m_j}\Big|_{\mathbf{m}^0}\Delta m_j^0 \tag{1.6}$$

$G_{ij}=\frac{\partial d_i}{\partial m_j}\Big|_{\mathbf{m}^0}$とすると、式(1.6)は、

$$\Delta\mathbf{d}\approx\mathbf{G}\Delta\mathbf{m} \tag{1.7}$$

書き下すと、

$$\begin{pmatrix} \Delta d_1 \\ \Delta d_2 \\ \Delta d_3 \\ \vdots \\ \Delta d_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & G_{n3} & G_{n4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \Delta m_3 \\ \Delta m_4 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

観測到達時刻と予想到達時刻の違い $\Delta\mathbf{d}$ と未知数の修正量 $\Delta\mathbf{m}$ は、線形関係になる。ここで、$\mathbf{G} = (G_{ij})$ は、式（1.2）とその定義から導ける。地下の地震波の速度とその分布、あるいは距離と走時の経験的な関係で決まる量である。

式(1.7)あるいは(1.8)が与えられると、最小 2 乗法によって、$\Delta\mathbf{m}$ を $\mathbf{G}$ と $\Delta\mathbf{d}$ から導くことができるようになる。

$\mathbf{G}$ は正方行列ではないので、式(1.7)あるいは(1.8)の等号が常に成り立つような $\Delta\mathbf{m}$ はない。左辺（観測された量）と右辺（$\Delta\mathbf{m}$ の推定値から予想される量）の差の 2 乗和として

$$E^2 = \sum_i (\Delta d_i - \sum_j G_{ij} \Delta m_j)^2 \tag{1.9}$$

を考え、この値を最小にすることで $\Delta\mathbf{m}$ を探す。E^2 を最小にする Δm_j を探すため、Δm_k に関する偏分がゼロになるような Δm_j を導く。

$$\frac{\partial E^2}{\partial \Delta m_k} = -2 \sum_i (\Delta d_i - \sum_j G_{ij} \Delta m_j) G_{ik} = 0 \tag{1.10}$$

並べ替えると、

$$\sum_i \Delta d_i G_{ik} = \sum_i (\sum_j G_{ij} \Delta m_j) G_{ik} \tag{1.11}$$

ベクトルで書くと、

$$\mathbf{G}^T \Delta\mathbf{d} = \mathbf{G}^T \mathbf{G} \Delta\mathbf{m} \tag{1.12}$$

$\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ は正方行列で

$$\Delta\mathbf{m} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \Delta\mathbf{d} \tag{1.13}$$

求められた $\Delta\mathbf{m}$ を、もとの初期値 $\mathbf{m}^0$ に加えると

$$\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}^0 + \Delta\mathbf{m}^0 \tag{1.14}$$

更新された推定値 $\mathbf{m}^1$ が得られる。この新しい推定値 $\mathbf{m}^1$ を式(1.4)の $\mathbf{m}^0$ と置き換え、同じようにして、新しい修正量 $\Delta\mathbf{m}$ を求めてやることができる。この操作を繰り返し、推定値を更新することによって、$\Delta\mathbf{m}$ が次第に小さくなり、最終的な $\mathbf{m}$ の推定値が決まる。

（参考）推定値の誤差

観測データの誤差は、母集団から抽出される標本の特性として評価する。観測データが正規分布に従う母集団からランダムに選ばれた標本の 1 つであるとし、k 番目の標本を $\mathbf{d}^k$ と表示すると、観測データの平均値は

$$\bar{\mathbf{d}} = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \mathbf{d}^k \tag{1.15}$$

値のばらつき等を表す共分散行列は

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}}^2 = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\bar{\mathbf{d}} - \mathbf{d}^k)(\bar{\mathbf{d}} - \mathbf{d}^k)^T \tag{1.16}$$

となる。

（1.13）式を

$$\Delta\mathbf{m} = (\mathbf{G}^T\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\Delta\mathbf{d} = \mathbf{G}^{-\mathbf{g}}\Delta\mathbf{d} \tag{1.17}$$

とおき換えると、推定値 $\Delta\mathbf{m}$ の共分散行列は

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{m}}^2 = \mathbf{G}^{-\mathbf{g}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}}^2(\mathbf{G}^{-\mathbf{g}})^T \tag{1.18}$$

となる。観測データが互いに無相関で同じ分散をもつと仮定すると、$\mathbf{I}$ を単位行列として、

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}}^2 = \sigma^2\mathbf{I} \tag{1.19}$$

となり、

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{m}}^2 = \sigma^2(\mathbf{G}^{\mathbf{T}}\mathbf{G})^{-1} \tag{1.20}$$

となる。この共分散行列の対角成分は、推定値の標準偏差の 2 乗にあたる。また、この共分散行列の非対角成分をみることで、推定値間の相関の強さや増減関係がわかる。（1.19）や（1.20）の σ^2 の真値はわからないが、観測データと最終モデルの予測値との差から以下のように推測できる。

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-M} \sum_{i=1}^{n} (d_i - d_i^s)^2 \tag{1.21}$$

ここで、d_i^s は最終モデルの予測値、d_i は実際の観測データ値、n は観測データの数、M は未知数の数（ここでは 4）、$n-M$ は自由度にあたる。

参考文献：Seth Stein and Michael Wysession “An Introduction to Seismology, Earthquakes, and Earth Structure” Blackwell Publishing, 2003.