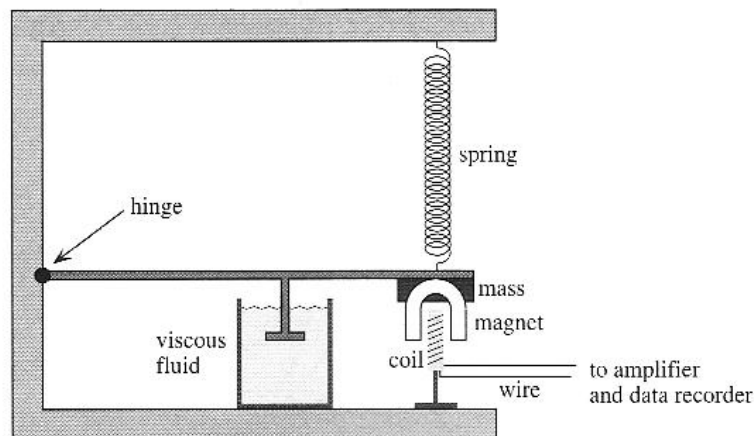


地面の揺れを地震計で記録する原理



図：地震計の原理

地震計の原理は上のような仕組み（上の場合は上下方向の揺れを記録する）。地震計の枠（灰色部分）は地面に固定されていて、地面が揺れると、重り（mass）の慣性により、重りと地震計の枠の間の位置が変化する。この変位を記録することで、地面（地震計の枠）の動きを記録する。

$u(t)$ は鉛直方向の地面（地震計の枠）の変位（揺れ）、 $z(t)$ は重り（mass）の地面（地震計の枠）に対する変位（ばねの釣り合いからの変位）、 $u(t) + z(t)$ は、重りの絶対変位とする。

重りにかかるばね（spring）の力は

$$-kz(t) \quad (1.1)$$

粘性流体（viscous fluid）は重りの振動を抑えるダッシュポットの役割をする。そのダンピングは速度に比例し、ダンピング係数を D とすると、

$$-D \frac{dz}{dt} \quad (1.2)$$

従って、重りについて運動方程式をたてると

$$-kz(t) - D \frac{dz(t)}{dt} = m \frac{d^2}{dt^2} [u(t) + z(t)] \quad (1.3)$$

つまり、

$$\ddot{z} + \frac{D}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -\ddot{u} \quad (1.4)$$

$\omega_0^2 = k/m$ 、 $2\varepsilon = D/m$ とすれば、

$$\ddot{z} + 2\varepsilon \dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{u} \quad (1.5)$$

ω_0 はばねの固有角周波数 (natural angular frequency) にあたる。 $h = \varepsilon / \omega_0$ 減衰定数 (damping constant) を用いると

$$\ddot{z} + 2h\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{u} \quad (1.6)$$

地震計の周波数応答関数

地面の揺れや重りの地面に対するゆれを、ある各周波数 (ω) の振動として表現すると、

$$u(t) = U(\omega)e^{j\omega t} \quad (1.7)$$

$$z(t) = Z(\omega)e^{j\omega t} \quad (1.8)$$

ここで、 j は虚数を示す。式 (1.6) の重りの運動方程式は、

$$Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + j2h\omega_0\omega - \omega^2} U(\omega) = A(\omega)U(\omega) \quad (1.9)$$

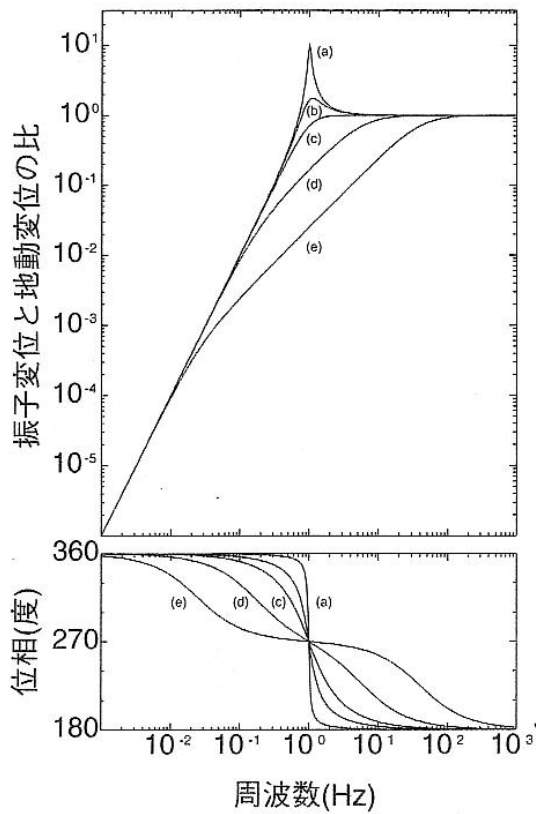
となる。従って、地震計の特性 (ここでは ω_0 、 h) で決まる複素関数 $A(\omega)$ がわかれば、重りの地震計の枠に対するゆれ (地震計が記録した揺れのデータ) $Z(\omega)$ から、地面自体の揺れ $U(\omega)$ が計算できる (電磁式地震計では、電圧 $E(\omega)$ から地面の速度 $V(\omega)$ が計算できることになる)。 $A(\omega)$ は周波数応答関数 (frequency response function) と呼ばれる。 $U(\omega)$ がデルタ関数 $\delta(t)$ であるときの地震計の出力に相当。

$A(\omega)$ は複素関数であり、振幅と位相によって表現できる。

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

$$|A(\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2}} \quad (1.10)$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{-2h\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} + \pi$$



図：周波数と減衰定数に依存する frequency response function の振幅 $|A(\omega)|$ (上図) と位相 $\phi(\omega)$ (下図)。ここでは重りの固有周波数を 1 Hz (つまり、 $\omega_0 = 2\pi$) としている。任意の固有周波数に対しては、図の横軸の値が ω/ω_0 に相当する。(a) $h = 0.05$ (b) $h = 0.3$ (c) $h = 0.71$ (d) $h = 3.0$ (e) $h = 20$

式 (1.10) の frequency response function は、式 (1.6) をラプラス変換

$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ としてえられる Transfer function

$$\begin{aligned}
 A(s) &= \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + 2\epsilon s + \omega_0^2} \\
 &= \frac{-s^2}{\{s + (h - \sqrt{h^2 - 1})\omega_0\}\{s + (h + \sqrt{h^2 - 1})\omega_0\}}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

で、 $s = j\omega$ した場合からもえられる。

pole と zero による地震計の応答関数の表現

以上のように、地震計の記録は、地面の揺れをそのまま記録しているのではなく、地面の揺れに地震計の特性である応答関数を作用させたデータを記録している。

地震計の応答は、ひとつの一般的な表現として、周波数（あるいは角周波数）の関数として、

$$A(s) = \frac{A_0 D_s (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)} \quad (1.12)$$

のような transfer function の形で表せる。ここで、 $s = j\omega = 2\pi f j$ とすれば、周波数応答関数になり、 j は虚数を、 f は周波数を示す。 $p_i (i=1, \dots, m)$ はポール (pole)、 $z_i (i=1, \dots, n)$ はゼロ (zero) と呼ばれる。ともに、複素数で与えられる。 A_0 は normalization frequency とともに与えられる「A0 normalization factor」、 D_s は Sensitivity。 $A_0 D_s$ は実数である。

私たちが利用できる観測網の地震計の応答関数は、このようなポールとゼロの値として手にすることができる。例えば、Streckeisen の STS-1 という広帯域地震計では、地動の速度 $\dot{u}(t)$ (単位 m/s) に対して、 $A_0 = 3948.58$ (normalization frequency 0.02Hz)

$$\begin{aligned} z_1 &= (0.0, 0.0) \\ z_2 &= (0.0, 0.0) \\ p_1 &= (-0.01234, 0.01234) \\ p_2 &= (-0.01234, -0.01234) \\ p_3 &= (-39.18, 49.12) \\ p_4 &= (-39.18, -49.12) \end{aligned} \quad (1.13)$$

である。 D_s は、例えば、西サモア (AFI) に設置された地震計では $D_s = 9.0513 \times 10^8$ 。上

記の例でわかるように、ポールが複素共役な値の組からなっている。これは、もともになる線形微分方程式（例えば、式 (1.6) のような）の係数が実数であるとき、そこから得られるポールとゼロは、実数か、複素共役な値の組にしかならないことに起因する。