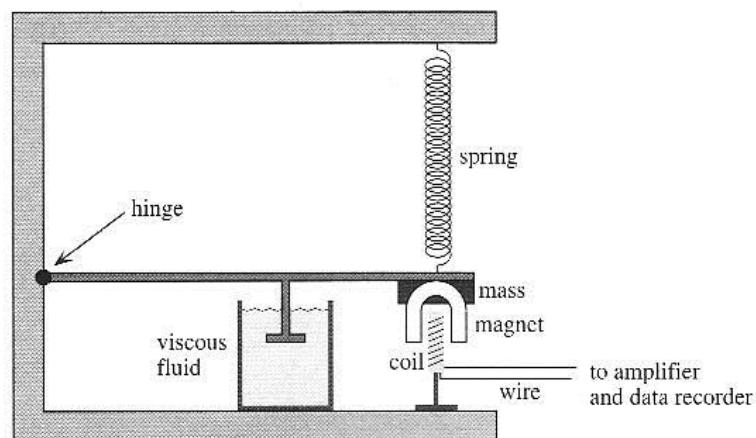


## 地面の揺れを地震計で記録する原理



図：地震計の原理

地震計の原理は上のような仕組み（上の場合は上下方向の揺れを記録する）。地震計の枠（灰色部分）は地面に固定されていて、地面が揺れると、重り（mass）の慣性により、重りと地震計の枠の間の位置が変化する。この変位を記録することで、地面（地震計の枠）の動きを記録する。

$u(t)$  は鉛直方向の地面（地震計の枠）の変位（揺れ）、 $z(t)$  は重り（mass）の地面（地震計の枠）に対する変位（ばねの釣り合いからの変位）、 $u(t) + z(t)$  は、重りの絶対変位とする。

重りにかかるばね（spring）の力は

$$-kz(t) \quad (1.1)$$

粘性流体 (viscous fluid) は重りの振動を抑えるダッシュポットの役割をする。そのダンピングは速度に比例し、ダンピング係数を  $D$  とすると、

$$-D \frac{dz}{dt} \quad (1.2)$$

従って、重りについて運動方程式をたてると

$$-kz(t) - D \frac{dz(t)}{dt} = m \frac{d^2}{dt^2} [u(t) + z(t)] \quad (1.3)$$

つまり、

$$\ddot{z} + \frac{D}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = -\ddot{u} \quad (1.4)$$

$\omega_0^2 = k/m$ 、 $2\varepsilon = D/m$  とすれば、

$$\ddot{z} + 2\varepsilon \dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{u} \quad (1.5)$$

$\omega_0$  はばねの固有角周波数 (natural angular frequency) にあたる。 $h = \varepsilon / \omega_0$  減衰定数 (damping constant) を用いると

$$\ddot{z} + 2h\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{u} \quad (1.6)$$

## 地震計の周波数応答関数

地面の揺れや重りの地面に対するゆれを、ある各周波数 ( $\omega$ ) の振動として表現すると、

$$u(t) = U(\omega)e^{j\omega t} \quad (1.7)$$

$$z(t) = Z(\omega)e^{j\omega t} \quad (1.8)$$

ここで、 $j$  は虚数を示す。式 (1.6) の重りの運動方程式は、

$$Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + j2h\omega_0\omega - \omega^2} U(\omega) = A(\omega)U(\omega) \quad (1.9)$$

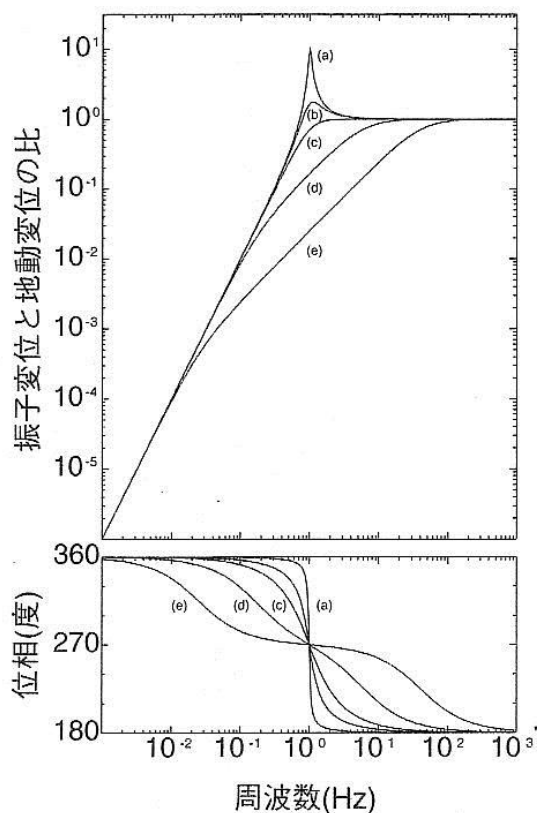
となる。従って、地震計の特性 (ここでは  $\omega_0$ 、 $h$ ) で決まる複素関数  $A(\omega)$  がわかれば、重りの地震計の枠に対するゆれ (地震計が記録した揺れのデータ)  $Z(\omega)$  から、地面自体の揺れ  $U(\omega)$  が計算できる。 $A(\omega)$  は周波数応答関数 (frequency response function) と呼ばれる。 $U(\omega)$  がデルタ関数  $\delta(t)$  であるときの地震計の出力に相当。

$A(\omega)$  は複素関数であり、振幅と位相によって表現できる。

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\phi(\omega)}$$

$$|A(\omega)| = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2}} \quad (1.10)$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{-2h\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} + \pi$$



図：周波数と減衰定数に依存する frequency response function の振幅  $|A(\omega)|$  (上図) と位相  $\phi(\omega)$  (下図)。ここでは重りの固有周波数を 1 Hz (つまり、 $\omega_0 = 2\pi$ ) としている。任意の固有周波数に対しては、図の横軸の値が  $\omega/\omega_0$  に相当する。(a)  $h = 0.05$  (b)  $h = 0.3$  (c)  $h = 0.71$  (d)  $h = 3.0$  (e)  $h = 20$

式 (1.10) の frequency response function は、式 (1.6) をラプラス変換

$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  してえられる Transfer function

$$\begin{aligned}
 A(s) &= \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + 2\epsilon s + \omega_0^2} \\
 &= \frac{-s^2}{\{s + (h - \sqrt{h^2 - 1})\omega_0\} \{s + (h + \sqrt{h^2 - 1})\omega_0\}}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

で、 $s = j\omega$  した場合からもえられる。

## pole と zero による地震計の応答関数の表現

以上のように、地震計の記録は、地面の揺れをそのまま記録しているのではなく、地面の揺れに地震計の特性である応答関数を作用させたデータを記録している。

地震計の応答は、ひとつの一般的な表現として、周波数（あるいは角周波数）の関数として、

$$A(s) = \frac{A_0 D_s (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)} \quad (1.12)$$

のような transfer function の形で表せる。ここで、 $s = j\omega = 2\pi f j$  とすれば、周波数応答関数になり、 $j$  は虚数を、 $f$  は周波数を示す。 $p_i (i=1, \dots, m)$  はポール (pole) と呼ばれ、 $z_i (i=1, \dots, n)$  はゼロ (zero) と呼ばれる。ともに、複素数で与えられる。 $A_0$  は normalization frequency とともに与えられる「A0 normalization factor」、 $D_s$  は Sensitivity。 $A_0 D_s$  は実数である。

私たちが利用できる観測網の地震計の応答関数は、このようなポールとゼロの値、定数倍率の値として手にすることができる。例えば、Guralp CMG-40T 広帯域地震計（実習で本堂トンネルに設置した地震計）では、地動の速度  $\dot{u}(t)$  に対して、

$$\begin{aligned} m &= n = 2 \\ z_1 &= (0.0, 0.0) \\ z_2 &= (0.0, 0.0) \\ p_1 &= (-0.1481, 0.1481) \\ p_2 &= (-0.1481, -0.1481) \end{aligned} \quad (1.13)$$

である。

上記の例でわかるように、ポールが複素共役な値の組からなっている。これは、もともとなる線形微分方程式（例えば、式 (1.6) のような）の係数が実数であるとき、そこから得られるポールとゼロは、実数か、複素共役な値の組にしかならないことに起因する。

また、時間微分は、周波数領域では、 $s = j\omega = 2\pi f j$  をかけることと等価である。(1.13) にゼロを1つ追加すると、地動の変位  $u(t)$  に対する地震計の応答関数になる。(1.13) からゼロを1つ減らすと、地動の加速度  $\ddot{u}(t)$  に対する地震計の応答関数になる。