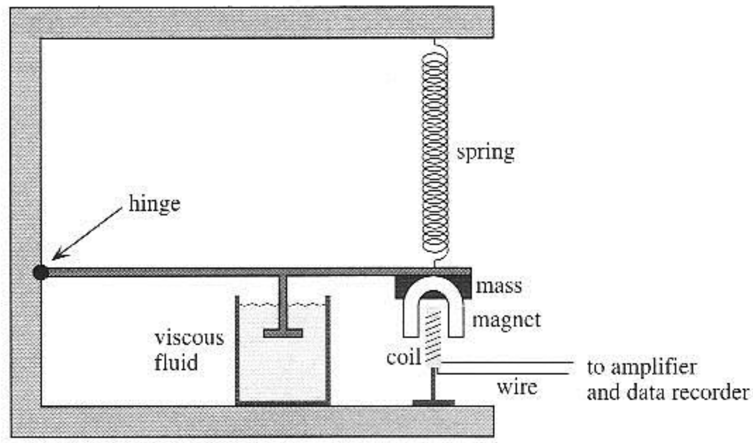
地面の揺れを地震計で記録する原理



図：地震計の原理

地震計の原理は上のような仕組み（上の場合は上下方向の揺れを記録する）。地震計の枠（灰色部分）は地面に固定されていて、地面が揺れると、重り（mass）の慣性により、重りと地震計の枠の間の位置が変化する。この変位を記録することで、地面（地震計の枠）の動きを記録する。

$u(t)$ は鉛直方向の地面（地震計の枠）の変位（揺れ）、$z(t)$ は重り（mass）の地面（地震計の枠）に対する変位（ばねの釣り合いからの変位）、$u(t)+z(t)$ は、重りの絶対変位とする。

重りにかかるばね（spring）の力は

$$-kz(t) \tag{1.1}$$

粘性流体(viscous fluid)は重りの振動を抑えるダッシュポットの役割をする。そのダンピングは速度に比例し、ダンピング係数を D とすると、

$$-D\frac{dz}{dt} \tag{1.2}$$

従って、重りについて運動方程式をたてると

$$-kz(t)-D\frac{dz(t)}{dt}=m\frac{d^2}{dt^2}[u(t)+z(t)] \tag{1.3}$$

つまり、

$$\ddot{z}+\frac{D}{m}\dot{z}+\frac{k}{m}z=-\ddot{u} \tag{1.4}$$

$\omega_0^2=k/m$ 、$2\varepsilon=D/m$ とすれば、

$$\ddot{z}+2\varepsilon\dot{z}+\omega_0^2 z=-\ddot{u} \tag{1.5}$$

ω_0 はばねの固有角周波数（natural angular frequency）にあたる。$h = \varepsilon / \omega_0$ 減衰定数（damping constant）を用いると

$$\ddot{z} + 2h\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{u} \tag{1.6}$$

地震計の周波数応答関数

地面の揺れや重りの地面に対するゆれを、ある各周波数（ω）の振動として表現すると、

$$u(t) = U(\omega)e^{j\omega t} \tag{1.7}$$

$$z(t) = Z(\omega)e^{j\omega t} \tag{1.8}$$

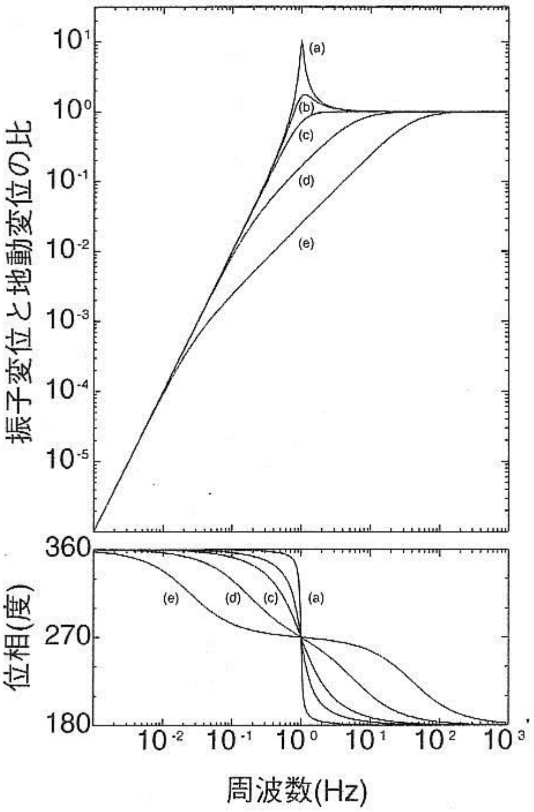
ここで、j は虚数を示す。式（1.6）の重りの運動方程式は、

$$Z(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 + j2h\omega_0\omega - \omega^2} U(\omega) = A(\omega)U(\omega) \tag{1.9}$$

となる。従って、地震計の特性（ここでは ω_0、h）で決まる複素関数 $A(\omega)$ がわかれば、重りの地震計の枠に対するゆれ（地震計が記録した揺れのデータ）$Z(\omega)$ から、地面自体の揺れ $U(\omega)$ が計算できる。$A(\omega)$ は周波数応答関数（frequency response function）と呼ばれる。$U(\omega)$ がデルタ関数 $\delta(t)$ であるときの地震計の出力に相当。

$A(\omega)$ は複素関数であり、振幅と位相によって表現できる。

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |A(\omega)| e^{i\phi(\omega)} \\ |A(\omega)| &= \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2}} \\ \phi(\omega) &= -\tan^{-1} \frac{-2h\omega_0\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} + \pi \end{aligned} \tag{1.10}$$



図：周波数と減衰定数に依存する frequency response function の振幅$|A(\omega)|$（上図）と位相$\phi(\omega)$（下図）。ここでは重りの固有周波数を 1 Hz（つまり、$\omega_0 = 2\pi$）としている。任意の固有周波数に対しては、図の横軸の値がω/ω_0に相当する。(a) $h = 0.05$ (b) $h = 0.3$ (c) $h = 0.71$ (d) $h = 3.0$ (e) $h = 20$

式（1.10）の frequency response function は、式（1.6）をラプラス変換$L[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ してえられる Transfer function

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{-s^2}{s^2 + 2\varepsilon s + \omega_0^2} \\ &= \frac{-s^2}{\{s + (h - \sqrt{h^2 - 1})\omega_0\}\{s + (h + \sqrt{h^2 - 1})\omega_0\}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

で、$s = j\omega$ した場合からもえられる。

pole と zero による地震計の応答関数の表現

以上のように、地震計の記録は、地面の揺れをそのまま記録しているのではなく、地面の揺れに地震計の特性である応答関数を作用させたデータを記録している。

地震計の応答は、ひとつの一般な表現として、周波数（あるいは角周波数）の関数として、

$$A(s)=\frac{A_0 D_s (s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_m)} \tag{1.12}$$

のような transfer function の形で表せる。ここで、$s=j\omega=2\pi fj$ とすれば、周波数応答関数になり、j は虚数を、f は周波数を示す。$p_i(i=1,\cdots m)$ はポール（pole）と呼ばれ、$z_i(i=1,\cdots n)$ はゼロ（zero）と呼ばれる。ともに、複素数で与えられる。A_0 は normalization frequency とともに与えられる「A0 normalization factor」、D_s は Sensitivity。A_0 D_s は実数である。

私たちが利用できる観測網の地震計の応答関数は、このようなポールとゼロの値、定数倍率の値として手にすることができる。例えば、Guralp CMG－40T 広帯域地震計（実習で火山センターに設置した地震計）では、地動の速度 $\dot{u}(t)$ に対して、

$$\begin{aligned}
&m=n=2\\
&z_1=(0.0,0.0)\\
&z_2=(0.0,0.0)\\
&p_1=(-0.1481,0.1481)\\
&p_2=(-0.1481,-0.1481)
\end{aligned} \tag{1.13}$$

である。

上記の例でわかるように、ポールが複素共役な値の組からなっている。これは、もとになる線形微分方程式（例えば、式（1.6）のような）の係数が実数であるとき、そこから得られるポールとゼロは、実数か、複素共役な値の組にしかならないことに起因する。

また、時間微分は、周波数領域では、$s=j\omega=2\pi fj$ をかけることと等価である。(1.13) にゼロを１つ追加すると、地動の変位 $u(t)$ に対する地震計の応答関数になる。(1.13)からゼロを１つ減らすと、地動の加速度 $\ddot{u}(t)$ に対する地震計の応答関数になる。