R1,R2,R3 の位相から地震の継続時間を導く

地震の断層の大きさがゼロと近似でき、ずれの時間関数がステップ関数である場合、位置 $\mathbf{r}$ におけるレイリー波の鉛直成分のフーリエスペクトルは

$$\hat{C}(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\exp(i\frac{\pi}{4})\exp(-i\frac{\omega R\Delta}{c})\exp(i\frac{m\pi}{2})\times\{s_R S_R+p_R P_R+iq_R Q_R\} \tag{1.1}$$

と表せる。ここで、ω は角周波数、θ は震央距離、i は虚数単位、Δ はレイリー波の伝播距離、c は位相速度、R は地球の半径、m はレイリー波が震央およびその対蹠点を通過する回数である。$\{\cdots\}$ は地震のレイリー波放射特性スペクトルで、このうち s_R, p_R, q_R が断層運動のパラメタ（断層の傾斜角 δ、すべり角 λ、断層の走向とレイリー波の伝播方位の差 ϕ）の関数として

$$\begin{aligned}
s_R &= \sin\lambda\sin\delta\cos\delta \\
p_R &= \cos\lambda\sin\delta\sin 2\phi-\sin\lambda\sin\delta\cos\delta\cos 2\phi \\
q_R &= \sin\lambda\cos 2\delta\sin\phi+\cos\lambda\cos\delta\cos\phi
\end{aligned} \tag{1.2}$$

で与えられる。

長さ L の断層で、ずれが断層の端から速度 V で、レイリー波の伝播方位から Θ の方向に広がった場合には、レイリー波の鉛直成分のフーリエスペクトルは、(1.1) 式を使って次のように表せる。

$$\hat{V}(\mathbf{r},\omega)=\hat{C}(\mathbf{r},\omega)\hat{F}(\omega,\Theta)\hat{D}(\omega) \tag{1.3}$$

$\hat{F}(\omega,\Theta)$ は directivity と呼ばれる効果で、地震波の放射継続時間が方向に依存して変化してみえる効果である。

$$\begin{aligned}
\hat{F}(\omega,\Theta) &= \frac{\sin X}{X}\exp(-iX) \\
X &= \frac{\omega L}{2V}-\frac{\omega L}{2c}\cos\Theta
\end{aligned} \tag{1.4}$$

また、$\hat{D}(\omega)$ は

$$\hat{D}(\omega)=\exp(-i\omega T) \tag{1.5}$$

で、断層上の各点でのずれが有限の継続時間 T（rise time と呼ばれる）で起こる効果を含む。したがって、(1.3)式におけるレイリー波 R_{2n+1} と R_{2m} のフーリエ位相スペクトルは、(1.1)(1.2)(1.4)(1.5)式から、

$$\begin{aligned}
\Phi_{2n+1} &= \frac{\pi}{4}-\frac{\omega R\Delta_{2n+1}}{c}+\frac{2n\pi}{2}+\Phi_S-X(\Theta)-\omega T \\
\Phi_{2m} &= \frac{\pi}{4}-\frac{\omega R\Delta_{2m}}{c}+\frac{2m-1}{2}\pi-\Phi_S-X(\Theta+\pi)-\omega T
\end{aligned} \tag{1.6}$$

と表せる。Φ_S は R_{2n+1} に対して（1.1）式の $\{\cdots\}$ からくる位相である。真逆方向（$\phi+\pi$）に伝播する R_{2m} では $\{\cdots\}$ からくる位相は(1.2)式より $-\Phi_S$ となる。

(1.6)式の 2 つの位相スペクトルの和は、(1.4)式を考慮すると、

$$\Phi_{2n+1}+\Phi_{2m}=\frac{\pi}{2}-\frac{\omega R(\Delta_{2n+1}+\Delta_{2m})}{c}+(n+m-\frac{1}{2})\pi-\omega(\frac{L}{V}+T) \tag{1.7}$$

右辺の第 2 項は、R_{2n+1} と R_{2m} の経路を考えると、

$$\frac{\omega R(\Delta_{2n+1}+\Delta_{2m})}{c}=\omega R(\frac{2\pi n}{c}+\frac{\theta}{c})+\omega R(\frac{2\pi m}{c}-\frac{\theta}{c})=(n+m)\frac{2\pi R}{c} \tag{1.8}$$

一方、(1.6)式から

$$\Phi_{2n+1}-\Phi_{2n+3}+\pi=\frac{2\pi R}{c} \tag{1.9}$$

であるので、(1.8)式は

$$\frac{\omega R(\Delta_{2n+1}+\Delta_{2m})}{c}=(n+m)(\Phi_{2n+1}-\Phi_{2n+3}+\pi) \tag{1.10}$$

となる。これを(1.7)式に代入することで、

$$\Phi_{2n+1}+\Phi_{2m}+(n+m)(\Phi_{2n+1}-\Phi_{2n+3})=-\omega(\frac{L}{V}+T)=-\omega\tau \tag{1.11}$$

を得る。したがって、レイリー波 R_{2n+1} R_{2n+3} R_{2m} の位相スペクトル Φ_{2n+1} Φ_{2n+3} Φ_{2m} が得られると、地震の断層運動の継続時間（source process time）$\tau=\frac{L}{V}+T$ が推定できる。

補足［１］

切り出した R_{2n+1} R_{2n+3} R_{2m} をフーリエ変換して得られる位相 Φ'_{2n+1} Φ'_{2n+3} Φ'_{2m} は、先頭データの時刻をゼロとしているので、先頭データの時間までの位相を補正する。例えば、切り出した R_{2n+1} の先頭データの時刻が震源時から $\bar{t}$ とすると

$$\Phi_{2n+1}=\Phi'_{2n+1}-\omega\bar{t} \tag{1.12}$$

ここで、ω は角周波数。

補足［２］

(1.11)式の左辺には、$\pm 2\pi N$（N は任意の整数）の任意性がある。