

遠地P波の変位波形の作成

遠地P波の変位波形（変位の時間関数）は、波線理論をもとに、 t を時間として、

$$U^P(t) = S(t) * E(t) * P(t)$$

で近似的に計算できる。*は畳み込み積分（convolution）を表す（【付録】参照）

ここで、

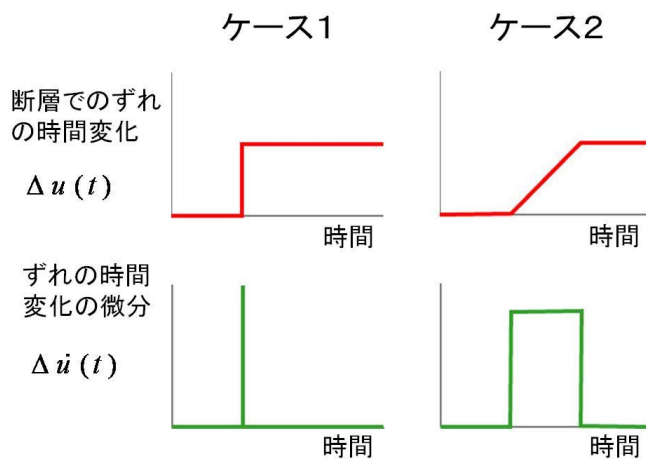
$S(t)$ は地震の断層運動によって決まる時間関数 → 【1】

$E(t)$ は地下構造によって生じる種々の波の到着を与える時間関数（ここでは、直達P波とともに、震源近傍の地表での反射波や変換波を与える時間関数） → 【2】

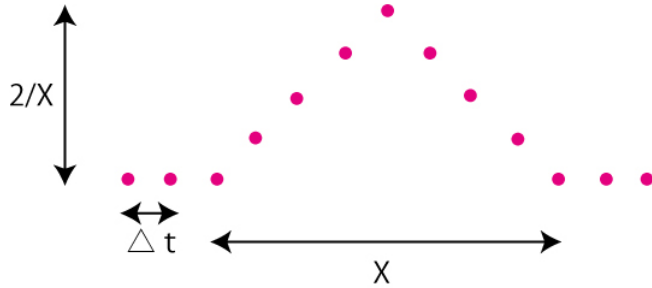
$P(t)$ は震源から観測点まで伝わる時の非弾性の効果を与える時間関数 → 【3】

【1】 $S(t)$: 震源の効果

地震の断層の大きさが無視できるような場合（地震の震源領域を点と仮定できる時）、遠地では far-field 項だけになるので、 $S(t)$ はモーメントの時間微分になる。モーメントの時間変化は $M(t) = \mu A \Delta u(t)$ で定義され、 μ は剛性率、 A は断層の面積、 $\Delta u(t)$ は断層のずれの時間変化。よって $S(t)$ は $\dot{M}(t)$ （ドットは時間微分を表す）。剛性率、面積が一定であると、 $\Delta \dot{u}(t)$ に比例し、断層でのずれの時間関数の時間微分となる。均質無限弾性体では、遠地P波の波形（かたち）は、断層のずれ関数の微分となる（下図参照）。また、断層の大きさが無視できない時には、この関数を、時間遅れを考慮して震源領域にわたって積分したものが $S(t)$ となる。



演習では、自分の好きな形の関数を使ってみてください。例えば、面積1となる三角形の関数を使う場合、

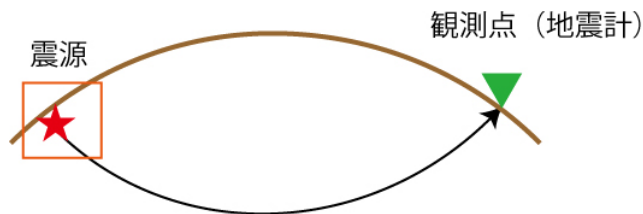


のような形の値をもつ関数（配列）をプログラムの中で作ることになる。

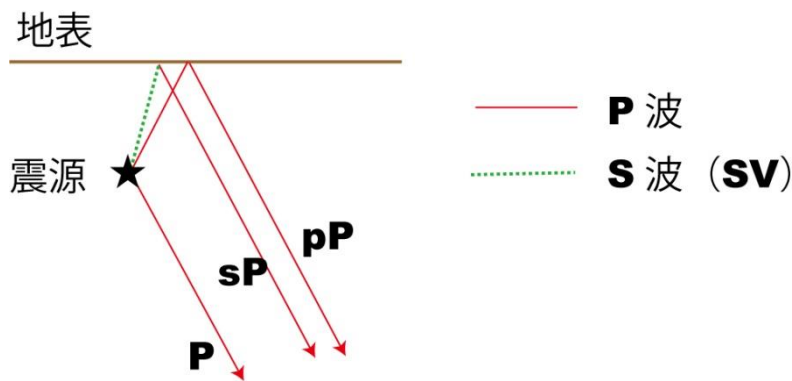
なお、関数の継続時間（上の例では X ）の値は後で変えられるようにしておく。後の演習で、継続時間の値を変えた場合の計算波形の違いを調べる。 Δt は時系列データの時間間隔で本演習では 0.2 秒とする。まずは継続時間を 10 秒とする。

【2】 $E(t)$: 構造の効果

地球には地表があり、そこで地震波が反射したり変換したりする。観測点が遠地にあり、地震の震源が浅いと、震源のそばの地表で反射したり変換したりして生じた P 波も、直接伝わる P 波とほぼ同じ波線を通して、似たような時刻に観測点に到着する。



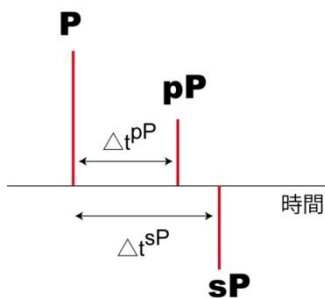
震源のまわりの四角の領域では、



下向きに直接観測点に向かう P 波（直達 P 波）のほかに、震源の上の地表で反射した pP 波と、地表で S 波から P 波に変換した sP 波が生じる。震源が浅いと、これら P、pP、sP の経路や観測点までの所要時間の違いは小さくなる。遠方の観測点では、直達 P 波が来たあとに、pP、それから sP が短い時間で到達することになる。

震源から波が一瞬で放射される場合、これらの波の到着する時間と振幅を模式的に表すと、下図のようになる。これが $E(t)$ 。

Δt^{pP} と Δt^{sP} は、P 波を平面波と仮定して、pP と sP がその平面波の位相からどれだけずれるかを幾何学的に考えると求められる。今回の演習では、iasp91 という 1 次元速度モデルの値を参考にして、地震の震源周辺の P 波速度を 6.1 km/s、S 波速度を 3.53 km/s と仮定してみよう。震源の深さは、まずは USGS の震源の深さにする。また、振幅（図の赤線の高さ）は、波が伝播する方向と P 波（あるいは SV 波）放射特性、地表での反射係数などで決まる。断層の走向、傾斜角、すべり角は、まずは、USGS が W-phase から推定した moment tensor 解の節面の値を仮定する。



これら P、pP、sP からなる時間関数 $E(t)$ は、

$$E(t) = \hat{U}_{P+pP+sP}(t) \propto$$

$$R^P(\delta, \lambda, \phi, i_h) \delta(t - T_0) \quad \text{P 波}$$

$$+ R^P(\delta, \lambda, \phi, 180 - i_h) PP(i_h) \delta(t - T_0 - \Delta t^{pP}) \quad \text{pP 波}$$

$$+ \frac{\alpha^3}{\beta^3} R^{SV}(\delta, \lambda, \phi, 180 - i_h) SP(i_h) \frac{\beta \cos i_h}{\alpha \cos i_h} \delta(t - T_0 - \Delta t^{sP}) \quad \text{sP 波}$$

ここで、

T_0 は P 波の走時（本演習の解析ではゼロとしてよい）

R^P 、 R^{SV} は、P 波放射特性と SV 波放射特性（次ページの①②）

i_h, i'_h は、P波とS波の射出角 (take-off angle) で、スネルの法則から、 $\frac{\sin i_h}{\alpha} = \frac{\sin i'_h}{\beta}$

を満たす。

α, β は、P波とS波の速度

$PP(i_h), SP(i'_h)$ は以下のような地表での反射係数 (変位に対する係数)

■ 地表にP波で入射し、P波で反射したときの反射係数

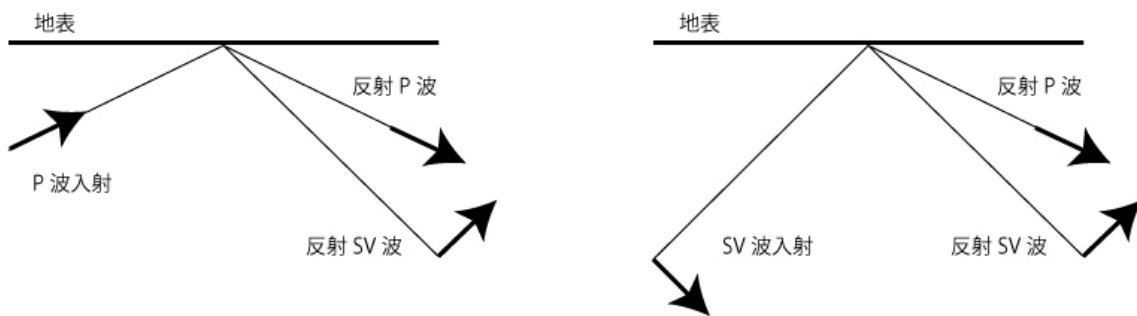
$$PP(i_h) = \frac{-\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i_h}{\alpha} \frac{\cos i'_h}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i_h}{\alpha} \frac{\cos i'_h}{\beta}}$$

■ 地表にSV波で入射し、P波で反射したときの反射係数

$$SP(i'_h) = \frac{4p \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right) \frac{\cos i'_h}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2} - 2p^2\right)^2 + 4p^2 \frac{\cos i_h}{\alpha} \frac{\cos i'_h}{\beta}}$$

なお、 $p = \frac{\sin i_h}{\alpha}$ (ray parameter)

注意：上記の2式は、下の図の太矢印のように、波が伝播する水平方向への振動を正にとっている反射係数。そのため、SV波からP波へ変換する場合、SV波、P波放射特性のときの振動の正負とずれてくる。実際には、上のSPの式に「-」をつけた式をsPの計算に使用する必要がある。PPについては、そのままよい。



① P波放射特性 (radiation pattern)

$$R^P = \cos \lambda \sin \delta \sin^2 i_h \sin 2\phi - \cos \lambda \cos \delta \sin 2i_h \cos \phi + \sin \lambda \sin 2\delta (\cos^2 i_h - \sin^2 i_h \sin^2 \phi) + \sin \lambda \cos 2\delta \sin 2i_h \sin \phi$$

② SV波放射特性 (radiation pattern)

$$R^{SV} = \sin \lambda \cos 2\delta \cos 2i_h \sin \phi - \cos \lambda \cos \delta \cos 2i_h \cos \phi$$

$$+ 0.5 \cos \lambda \sin \delta \sin 2i_h \sin 2\phi - 0.5 \sin \lambda \sin 2\delta \sin 2i_h (1 + \sin^2 \phi)$$

ここで、

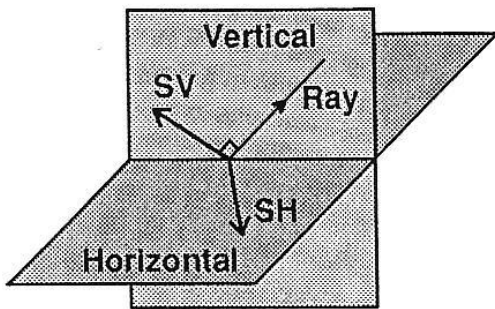
α と β は弾性体の P 波速度と S 波速度

i_h は、①の R^p では P 波の射出角、②の R^{SV} では S 波の射出角

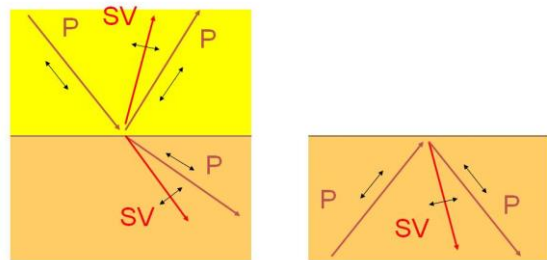
δ は断層の傾斜角、 λ は断層のすべり角

$\phi = \phi_s - \phi_f$ で、 ϕ_s は P 波および S 波の伝播する方位 (観測点の方位)、 ϕ_f は断層の走向

なお、SV 波は P 波とカップリングを起こす S 波の成分で、次のように定義している。



S 波は波線 (左図の Ray) に垂直な面で振動し、2つの成分、SH と SV で表現する。SH は水平 (地表) 面方向の S 波の振動、SV は SH と波線 (Ray) の両方に垂直な方向での S 波の振動である。SV 波と P 波は、地表や地震波速度の不連続に入射すると、互いに交換 (SV→P や P→SV) を起こす。



【3】 $P(t)$: 非弾性の効果

ごく小さな断層で断層運動が瞬時に起こり、P波変位波形がデルタ関数として震源を出発したとしても、地球内部が完全弾性体でないために、地震計のある遠方の観測点に達するまでに、P波変位波形はもはやデルタ関数でなくなる。

この非弾性の効果は、周波数領域において、複素数 $\exp(\bar{A}(\omega))$ で与えられる (ω は角周波数)。ここで、

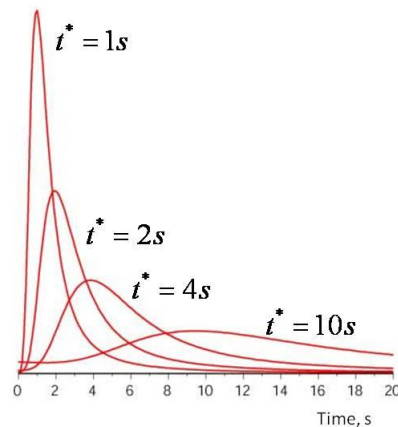
$$\begin{aligned} \bar{A}(\omega) \text{ の実部} & \quad -0.5t^* \omega \\ \bar{A}(\omega) \text{ の虚部} & \quad \frac{t^* \omega}{\pi} \ln(t^* \omega) - 1.4t^* \omega \end{aligned}$$

周波数領域での P 波変位に対して、

$$\bar{U}^P(\omega) \propto \bar{U}_{elastic}^P(\omega) \exp(\bar{A}(\omega)) = \tilde{S}(\omega) \tilde{E}(\omega) \exp(\bar{A}(\omega))$$

のように掛け合わせることで、非弾性の効果を考慮した P 波変位 (左辺) を得ることができる。つまり、 $P(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{P}(\omega)$ が、 $\exp(\bar{A}(\omega))$ となっている。

$\bar{A}(\omega)$ の中にある t^* (単位は秒) という量が非弾性の強さを表す。大きくなると、完全弾性体からのずれが大きくなる。 $\exp(\bar{A}(\omega))$ を逆フーリエ変換すると、非弾性効果の時間領域での応答関数 (impulse response) になる (これが $P(t)$ になる)。その例が下図。 t^* の値が大きくなると、より長い時間、尾を引くようになる。これらの時間関数は、言いかえると、地震の震源をでたときデルタ関数であった変位波形が、地震と観測点の間で決まる t^* に応じて、観測点につくころに変わっているだろう波形を示している。



上記に説明したように周波数領域で $\exp(\bar{A}(\omega))$ をかけるかわりに、このような時間領域での応答関数を時間領域で $U_{elastic}^P(t) = S(t) * E(t)$ に畳み込み積分しても、非弾性の効果を波形に入れることができる。

今回は、P波変位を計算するにあたって、 t^* の値として、遠地P波によく使用される1秒を用いる。

【付録】畳み込み積分 (convolution)

■時間領域

$$s(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

離散化すると、

$$s(i\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)g(i\Delta t - k\Delta t)\Delta t$$

ここで、 Δt は離散化したときの時間ステップ (時間間隔) である。

■周波数領域

$$\begin{aligned} \hat{s}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right] e^{-i\omega t} dt \\ & \quad z = t - \tau \quad \text{として} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(z)d\tau \right] e^{-i\omega z} e^{-i\omega\tau} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right] g(z)e^{-i\omega z} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)g(z)e^{-i\omega z} dt \\ &= \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega) \end{aligned}$$